

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавр

на тему «**Аналіз глобального руху кільцевої
галактики Хога**»

Виконав: студентка групи МП41
IV курсу,
спеціальності 113
Прикладна математика
Семенова А.А.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук
доцент кафедри
прикладної математики
Пославський С.О.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук
доцент кафедри
прикладної математики
????????????????

Харків — 2023 рік

Анотації

Семенова А.А. Аналіз глобального руху кільцевої галактики Хога

У роботі детально розглянуто дві теоретичні моделі об'єкта Хога: класична астрономічна та модель цього об'єкту як самогравітуючого кільцевого вихору із закрученням. Проведено порівняльний аналіз пояснень доплерівського зсуву випромінювання кільцевої галактики ефектами вихрової моделі та моделі, яка враховує лише орбітальний рух кільця навколо центральної галактики.

Semenova A.A. Analysis of the Hoag's ring galaxy global motion

The present study extensively examines two models pertaining to the Hoag's object: the classical astronomical model and the model representing the object as a self-gravitating vortex ring with swirl. The paper conducts a thorough comparative analysis between the explanations for the Doppler shift of the ring galaxy's radiation, considering the effects posited by the vortex model and the model solely accounting for the orbital motion of the ring around the central galaxy.

Зміст

Анотації	2
Вступ	4
1. Кільцеві вихори	6
1.1. Основні рівняння динаміки кільцевих вихорів	6
1.2. Кільцеві вихори із закрученням	8
2. Опис моделей об'єкта Хога	10
2.1. Класична астрофізична модель	10
2.2. Вихрова модель	11
3. Порівняльний аналіз двох моделей об'єкта Хога	19
Висновки	21
Список використаних джерел	22

Вступ

Галактика є гравітаційно пов'язаною системою, що складається зі зірок, зоряних скупчень, міжзоряного газу, пилу та темної матерії, які всі рухаються навколо центру галактики. Згідно з класифікацією Габбла з 1936 року, галактики поділяються на еліптичні, лінзоподібні, спіральні та неправильні, але існують галактики, які не відповідають жодній з цих категорій, вони називаються пекулярними галактиками та є об'єктом вивчення вчених. Однією з таких пекулярних галактик є об'єкт Хога - кільцеподібна галактика, що знаходиться в сузір'ї Змії, і яка була відкрита Артуром Хогом в 1950 році [2].

Артур Хог у своїй роботі спочатку вважав, що об'єкт, який він досліджує, є планетарною туманністю. Однак, подальші спостереження дозволили встановити, що це насправді галактика. При цьому він зберіг свої спочатку винесені гіпотези про те, що ядро та кільце галактики не пов'язані між собою. Хог запропонував гіпотезу, що кільце утворилося завдяки ефекту гравітаційної лінзи, але подальші дослідження відкинули цю ідею через однаковий червоний зсув ядра та кільця, а також складну структуру кільця, яку було б неможливо побачити в разі, якби воно було продуктом гравітаційної лінзи.

Відстань від Землі до галактики Хога складає близько 600 мільйонів світлових років, що становить приблизно 184 мегапарсек. В центрі галактики знаходиться зоряне скупчення з порівняно старих жовтих зірок, оточене

майже правильним кільцем з молодших блакитних зірок. Розмір галактики становить близько 100 тисяч світлових років. Вона належить до класу еліптичних галактик, що мають відносно однорідний склад зірок та інших об'єктів [1].

Інші гіпотези щодо формування кільцеподібних галактик включають зіткнення з неспівпадаючими галактиками, інтеракцію з міжгалактичним середовищем та ефекти гравітаційної лінзи. Однак, більш точне розуміння процесу формування кільцеподібних галактик залишається предметом активних досліджень.

Крім того, галактика Хога є важливим об'єктом дослідження в контексті вивчення гравітаційної лінзи, темної матерії та динаміки галактичних систем. Її структуру та властивості досліджували з використанням різноманітних методів, включаючи астрономічні спостереження та числові симуляції. [1]

Отже, галактика Хога, як один з представників пекулярних галактик, привертає увагу вчених своєю неординарною формою та складною структурою. Вона є важливим об'єктом дослідження в галактичній астрофізиці та космології та продовжує привертати інтерес дослідників з усього світу.

Розділ 1. Кільцеві вихори

1.1. Основні рівняння динаміки кільцевих вихорів

Кільцевий вихор - це рухоме утворення в потоці рідини, що утворюється наприклад в результаті зіткнення двох потоків з протилежними напрямками. Кільцевий вихор має кільцеподібну форму і обертається навколо свого центру. Він характеризується інтенсивністю, діаметром, швидкістю обертання та стійкістю.

Кільцеві вихори можуть утворюватись в різних середовищах, таких як повітря, вода або плазма, і мають різні масштаби, від декількох міліметрів до кілометрів. Вони відіграють важливу роль в багатьох фізичних явищах, таких як турбулентні потоки, метеорологічні явища, які вивчають аеродинаміка та гідродинаміка.

У науці кільцеві вихори вивчаються з використанням математичних моделей та чисельних методів, таких як метод скінченних елементів та методи гідродинамічного моделювання. Крім того, кільцеві вихори досліджуються за допомогою експериментів, що здійснюються відповідними лабораторними установками.

Визначення та основні характеристики кільцевих вихрів Кільцевий вихор - це зазвичай замкнутий вихор рідини, який має форму кільця. Він утворюється при взаємодії струменів рідини з різною швидкістю або при русі твердого тіла у рідині. Основні характеристики кільцевих вихрів:

- радіус кільця (R);
- швидкість обертання (ω);
- час життя (t);
- інтенсивність вихру (Γ).

Утворення та рух кільцевих вихрів Утворення кільцевих вихрів часто пов'язують з нестійкістю Кельвіна-Гельмгольца, яка виникає при зіткненні струменів рідини з різною швидкістю. Рух кільцевих вихрів описується рівняннями гідродинаміки:

- Рівняння збереження маси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

де ρ - густина рідини, \vec{v} - вектор швидкості.

- Рівняння імпульсів, рівняння Ейлера або Нав'є-Стокса

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.2)$$

де ρ - густина рідини, \vec{v} - вектор швидкості, p - тиск, μ - кінематична в'язкість.

Динаміка кільцевих вихрів Динаміка кільцевих вихрів визначається ефектами інерції та в'язкості рідини. Відношення між цими ефектами характеризується числом Рейнольдса (Re).

Якщо Re малий, то динаміка вихру визначається в'язкістю рідини.

Якщо ж Re великий, то динаміка вихру визначається інерцією рідини. Кільцеві вихри можуть взаємодіяти між собою та з твердими тілами, що призводить до різних ефектів, таких як зміна форми вихру, його переміщення та розтягнення.

Приклади застосування кільцевих вихрів Кільцеві вихри використовуються в різних галузях, наприклад:

- в аеродинаміці для зменшення опору повітря на літаках;
- в турбінах для збільшення ефективності їх роботи;
- в мікросистемах для переміщення та зміни розміру краплин рідини.

1.2. Кільцеві вихори із закрученням

Що таке закручені кільцеві вихори Закручені кільцеві вихори - це кільцеві вихори, у яких присутня азимутальна складова швидкості всередині ядра вихору. Це призводить до появи так званої "спіральної структури" руху рідини всередині кільцевого вихру.

Динаміка закручених кільцевих вихорів Динаміка закручених кільцевих вихорів визначається рядом параметрів, таких як радіус вихру, швидкість віртуального обертання та інші. Відмінністю від звичайних кільцевих вихорів є те, що азимутальна складова швидкості впливає на їхню поведінку.

Звичайний кільцевий вихор та вихор із закрученням відрізняються механізмом руху рідини, який викликає їх утворення. У звичайному кільцевому вихрі рух рідини обумовлений швидкістю у меридіональній площині,

утвореного рухом рідини. У вихорі із закрученням рідинний потік обертається у зв'язку з закрученням вихру навколо осі симетрії, що призводить до додаткової складової швидкості вздовж вісі вихру, що не спостерігається в звичайному кільцевому вихрі.

Розділ 2. Опис моделей об'єкта Хога

2.1. Класична астрофізична модель

У статті "Hoag's Object: evidence for cold accretion on to an elliptical galaxy" [3] розглядається модель об'єкту Хога, який є досить незвичайним галактичним об'єктом. Галактика Хога має форму диска, що оточує центральну сферичну структуру, яка нагадує еліптичну галактику. Ця структура оточена кільцем світла, що складається з молодих зірок. Цей кільцевий розподіл світла говорить про те, що галактика Хога формувалася не так, як більшість інших галактик. У моделі, запропонованій у цій статті, об'єкт Хога утворився за допомогою процесу холодної акреції, який передбачає накопичення газу з хмар, які розташовані поза галактикою, на її краю. Потім цей газ падає на галактику і утворює нові зірки. Цей процес пояснює внутрішню структуру об'єкта Хога, а саме, формування центральної сферичної структури і зовнішнього кільця світла.

Модель також дозволяє пояснити незвичайний розподіл металів в об'єкті Хога, де внутрішня сферична структура має вищу концентрацію металів порівняно з диском галактики. Це може бути пояснене тим, що під час процесу холодної акреції, газ, що накопичується на краю галактики, має меншу концентрацію металів, що впливає на склад газу, який потім падає на галактику.

Таким чином, модель холодної акреції, запропонована в цій статті, дозволяє пояснити незвичайну структуру і склад об'єкта Хога і може бути використана для розуміння об'єкту Хога. Автори статті використали модель холодної акумуляції. Ця модель передбачає, що газ охолоджується і згущується навколо галактик за рахунок гравітаційної взаємодії з темним матеріалом. Газ потім згущується до того рівня, коли він може почати утворювати зірки, і це призводить до утворення дискових галактик.

У випадку об'єкта Хога, який є еліптичною галактикою з яскравим кільцевим диском, автори вважають, що газ надходить до галактики зовнішніми потоками за допомогою процесу холодної акумуляції. Ці потоки газу охолоджуються, згущуються та згортаються під дією гравітації, що веде до утворення кільцевого диску. Такий процес акумуляції газу не тільки пояснює форму об'єкту Хога, але і забезпечує його потреби в газі для формування нових зірок.

Автори також розглядають можливість, що газ може прибувати до галактики через взаємодію з супутниковими галактиками. Однак, за результатами їх дослідження, ця модель не пояснює форму та структуру об'єкту Хога.

Отже, модель холодної акумуляції зовнішніх потоків газу краще пояснює спостережувані характеристики об'єкту Хога. Отримані результати показують, що процес холодної акумуляції може бути важливим механізмом утворення дисків галактик та зірок в них.

2.2. Вихрова модель

У своїй науковій роботі "Swirling self-gravitating vortex as the imagination of the Hoag's ring galaxy В. М. Конторович та С. О. Пославський [4] пропонують модель, яка описує об'єкт Хога, що складається з кільцево-

го (тороїдального) вихру Максвелла із завихренням, тобто з орбітальним рухом уздовж твірної тора навколо центральної еліптичної галактики.

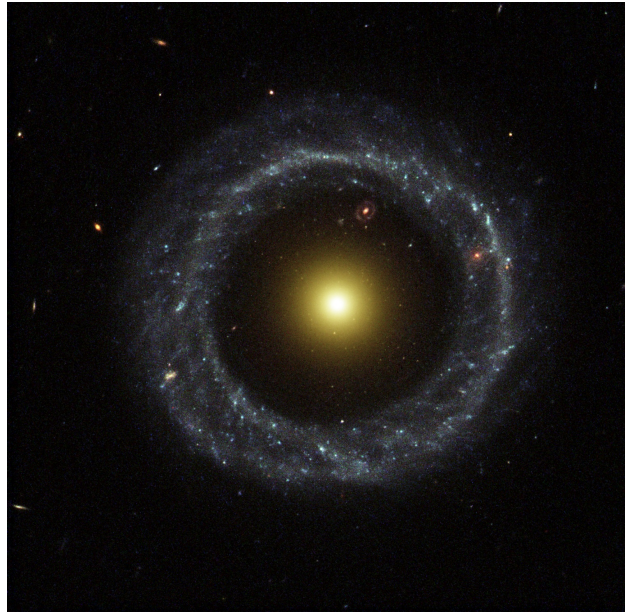


Рис. 2.1: Кольорове зображення об'єкта Ноаг з космічного телескопа Hubble архів (автор зображення: NASA, ESA та команда Спадщини Хаббла). [5] [4]

Вихрове кільце, як відомо, рухається відносно середовища для досягнення рівноваги. При русі в площині кільця виникає аналог підйомної сили Жуковського, яка компенсує силу, пов'язану з перепадом тиску між внутрішніми і зовнішніми сторонами кільця. Внаслідок ефекту Бернуллі тиск всередині кільця менший, оскільки швидкість потоку речовини всередині кільця вище, ніж зовні. Ця різниця тиску стискає кільце. Навпаки, «підйомна» сила спрямована назовні по радіусу кільця, намагаючись розширити його. Якщо ввести вектор циркуляції Γ перпендикулярно до площини меридіана у вихорі, то підйомна сила виражається через векторний добуток циркуляції на швидкість вихору, V . Ця сила (на одиницю довжини кільця) залежить від добутку циркуляції швидкості вихру та швидкості поступального руху кільця.

$$\Gamma = \oint_L v dr \quad (2.1)$$

Стан рівноваги досягається, коли ці сили врівноважені. Ураховуючи формулу Біо-Савара, для тонкого кільця можна отримати відому залежність для поступальної швидкості однорідного кільцевого вихору [6]:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln \left(\frac{8R}{e^{\frac{1}{4}} a} \right) \quad (2.2)$$

де R - великий радіус вихрового кільця, a - його малий радіус. Наявність орбітального руху відображається в зниженні тиску всередині кільця за рахунок ефекту Бернуллі. Це призводить до зменшення швидкості розповсюдження V руху кільця для забезпечення рівноваги між різницею тиску з обох сторін кільця та підйомною силою. Це зменшення швидкості в напрямку осі вихору (нормаль до площини екватора) відбувається за наявності закрутки.

Згідно з ефектом Віднелла-Саффмана, формула для поступальної швидкості однорідного кільцевого вихору тепер включає член, який враховує орбітальний рух. Цей член, залежно від швидкості орбітального потоку, може знижувати або збільшувати швидкість розповсюдження вихру. У зв'язку з цим, вираз для поступальної швидкості однорідного кільцевого вихору має наступний вигляд [6]:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln \left(\frac{8R}{e^{\frac{1}{4}} a} - \frac{4\pi^2 a^2 V_\phi^2}{\Gamma^2} \right) \quad (2.3)$$

Тут V_ϕ - швидкість орбітального потоку, вздовж якого можна вводити циркуляцію по великому колу. Зручним способом представлення циркуляції є вираз $\Gamma = 2\pi a V_\theta$, де V_θ - середнє значення складової швидкості, що лежить у меридіональному перерізі поверхні кільця (швидкість вихру).

Висока швидкість обертання кільцевого вихору може призвести до того, що його поступальна швидкість стає формально рівною нулю і може навіть змінювати свій знак. Це явище виникає в результаті зменшення тиску всередині кільця за рахунок орбітального потоку, що призводить до

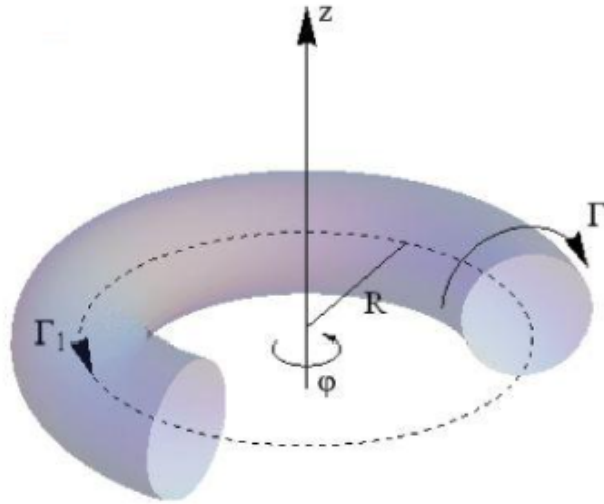


Рис. 2.2: Діаграма кільцевої галактики з циркуляцією вздовж обох малих і великі контури тора. Зчеплення контурів у випадку вихорів із завихренням призводить до появи топологічного інтеграла спіральності, що, у свою чергу, робить тороїдальний вихор більш стабільним. [4]

зміни знака підйомної сили, що пов'язана з градієнтом тиску при високих швидкостях завихрення в режимі «всмоктування». Для досягнення рівноваги в цьому випадку необхідна зміна напрямку руху кільцевого вихору. Це незвичайне явище спостерігається в чисельних експериментах і обмежене виникаючими нестабільностями. Об'єкт Хога є унікальною ілюстрацією самогравітаційного закрученого вихору в природі і є головним предметом цього дослідження.

В розглядуваному випадку об'єкта Хога припускається, що кільце не транслюється вздовж своєї осі відносно центральної еліптичної галактики. Умова відсутності поступального руху вихору (основне наближення) може бути отримана, якщо порівняти доданки у швидкості.

У цьому випадку орбітальна швидкість пов'язана з силою тяжіння і визначається масою M_c центральної еліптичної галактики та великим радіусом кільцевого вихору R :

$$V_{\phi}^2 = \frac{GM_c}{R} \quad (2.4)$$

Це дозволяє встановити співвідношення між масою кільця $M_{ring} = \pi * a^2 * 2\pi R * \rho$ (де ρ - середня щільність у кільці) та масою центральної галактики M_c , що виявляються близькими за порядком величини в разі об'єкта Хога:

$$\frac{M_c}{M_{ring}} \approx \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{8R}{e^{\frac{1}{4}}a}\right) \approx \frac{3}{\pi} \quad (2.5)$$

Звідси також можна знайти співвідношення між швидкістю вихору та швидкістю завихрення, що визначає параметри спостережуваної спіралі на зображенні об'єкта Хога:

$$\frac{V_\phi^2}{V_\theta^2} = \frac{M_c}{M_{ring}} \quad (2.6)$$

Варто зазначити, що ці вирази використовуються для рівномірного вихору з різкими межами, тому їх правильність відносно галактик відповідає лише порядку величин.

Дослідження динаміки речовини всередині вихрового кільця, яке є одним із найцікавіших явищ у фізиці, показали, що воно має глобальний оберт навколо одного з діаметрів (див. Рис. 2.3). Цей феномен може бути пояснений теорією вихорів.

На основі отриманих даних про радіальні швидкості кільця і ядра, які відповідають за спектральні зміщення лінії Н-альфа, а також за співвідношенням розмірів кільця і ядра, було встановлено, що ці об'єкти обертаються приблизно з однаковою кутовою швидкістю в одному напрямку. Це відповідає доплерівським зміщенням спектральних ліній, які пов'язані з реальним обертанням системи.

На Рис. 2.4 показано простішу бочкову моду Бесселя, що відповідає першому кореню $J_0(b_1) = 0$. В цій моді вихідна тороїдальна форма розтягнута вздовж однієї осі та стиснута вздовж іншої. Це може привести до того, що вихідний тороїдальний вихор може змінювати свою орієнтацію, рухаючись

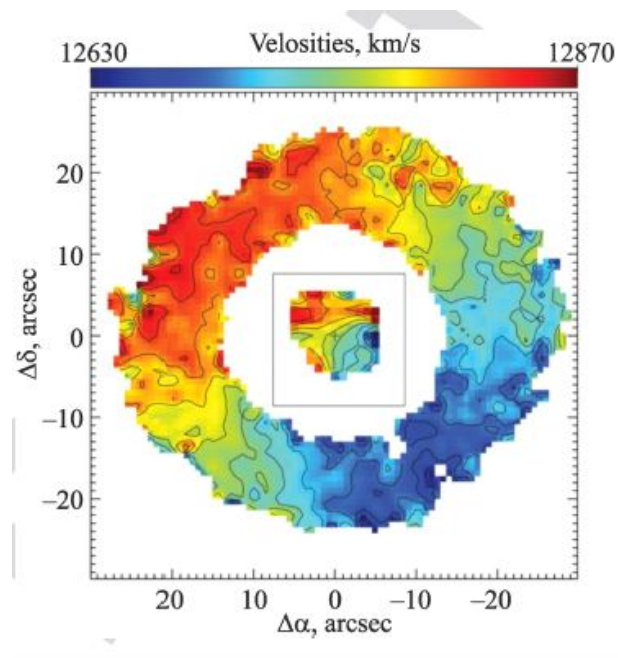


Рис. 2.3: Спостережуваний спектральний зсув випромінювання від об'єкта Хога. Червоний зсув відповідає віддаленню від спостерігача, синій — наближенню до нього. В. М. Конторович та С. О. Пославський [4] вважають, що зміщення вказує на обертання кільця та центральної галактики [7]

вздовж осі, де він розтягнутий. Це може призвести до появи ротації галактики, а саме, до того, що кільце і ядро галактики обертаються з однаковою кутовою швидкістю в одному напрямку.

Отже, можливий сценарій виникнення такої ротації полягає в тому, що вихідний тороїдальний вихор зазнає довгохвильових коливань, що можуть призвести до зміни його орієнтації та появи ротації галактики. Такий сценарій може пояснити спостережувану ротацію кільця і ядра об'єкта Хога. Проте, слід зазначити, що це лише один із можливих сценаріїв, а інші механізми можуть також призвести до подібної ротації.

Це дійсно може пояснити різницю швидкостей руху кільця в залежності від азимутального кута. Якщо кільце знаходиться в стаціонарному стані, то момент сил, який діє на нього, повинен бути нульовим. Однак, якщо відбувається деформація кільця залежно від кута азимута, то виникає момент, який приводить до прецесії осі кільця. Це обертання може пояснити відмін-

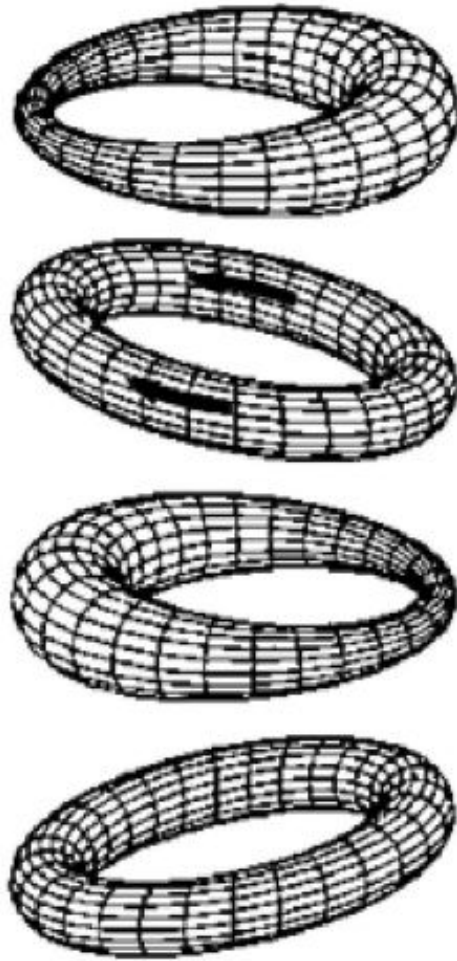


Рис. 2.4: Потовщення і витончення видно на протилежних сторонах виділеного діаметру, пов'язані з течією речовини в бочкоподібному режимі вихору коливання. Подібні ефекти видно на фотографії об'єкта Хога (див. рис. 2.1). [8] [4]

ність швидкості руху у напрямку вісі кільця для ділянок з потовщенням і потоншенням.

Формула гіроскопії $M = I[\omega_{GlobRot}; \omega_{orb}]$, яку використовують автори, відображає зв'язок між моментом інерції об'єкта, кутовою швидкістю обертання і моментом сил, що діє на об'єкт. Ця формула застосовується для опису руху гіроскопа, який також може прецесувати навколо своєї осі під дією зовнішнього моменту сил. У випадку з вихровим кільцем, момент інерції може бути розрахований на основі геометричних параметрів кільця, а кутова швидкість обертання може бути визначена з радіальних швидкостей

кільця та ядра, які вимірюються за допомогою спектральних ліній.

Обертання площини кільця призводить до зміни рівноважної орієнтації центральної еліптичної галактики в полі тяжіння кільця. Це можна уявити як обертання всього об'єкта Хога навколо діаметра, що з'єднує зони найбільшого потовщення та стоншення кільця. Як наслідок, центральна галактика теж обертається з такою самою кутовою швидкістю, як і кільце. Це явище можна спостерігати у випадку об'єкта Хога, який є добре відомим прикладом галактики з ротуючим кільцем.

Розділ 3. Порівняльний аналіз двох моделей об'єкта Хога

Постановка завдання Зробити порівняльний аналіз пояснень доплерівського зсуву випромінювання кільцевої галактики ефектами вихрової моделі [4] та моделі [3], яка враховує лише орбітальний рух кільця навколо центральної галактики.

У класичній астрофізичній моделі спостережуваний спектральний зсув випромінювання (Рис 2.3) від об'єкта Хога пояснюється нахилом променя зору відносно вісі обертання галактики. За даними статті [9] кут між центральною віссю обертання галактики та променем зору дорівнює $19^\circ \pm 5^\circ$. Лінійна швидкість із якою обертається кільцева галактика в об'єкті Хога дорівнює $V_{max} = 300(+100, -60) \frac{km}{c}$ [9]. Але ця модель не пояснює спектральний зсув випромінювання від центральної еліптичної галактиці.

$$V_{\phi_L} = V_{\phi} \sin \alpha \quad (3.1)$$

де V_{ϕ} - орбітальна швидкість, а α - кут між центральною віссю кільця та променем зору.

У вихровій моделі спектральний зсув випромінювання пов'язаний з проявою декількох фізичних ефектів, які разом призводять до обертання

кільцевої галактики навколо її діаметру. А це обертання, у свою чергу, пояснює спостережувану різницю швидкостей у напрямку променя зору (вісі кільця). Щоб виразити швидкість у напрямку вісі кільця потрібно скористатися формулою (2.3).

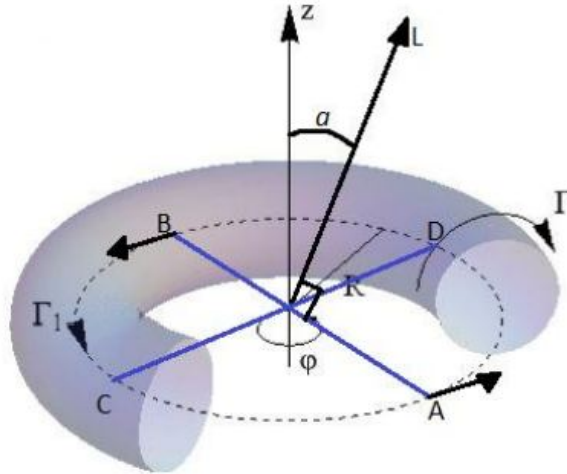


Рис. 3.1: Малюнок до задачі

Для розуміння моделі важливо зазначити, що півсума швидкостей $\frac{V_{A_L} + V_{B_L}}{2} = 12750 \frac{km}{s}$ - це швидкість віддалення від нашої галактики. Різнокольорове забарвлення пов'язане з різницею цих швидкостей. Нехай точка А на Рис.3.1 збігається з точкою мінімальної швидкості віддалення до глядача (синій колір на Рис.2.3), тоді $V_{A_L} = 12630 \frac{km}{s}$. А точка В співпадає з точкою максимальної швидкості віддалення від глядача (червоний колір на Рис.2.3), тоді $V_{B_L} = 12870 \frac{km}{s}$. А у точках С і D проєкція швидкості на напрям вісі кільця буде $V_{C_L} = V_{D_L} = 12750 \frac{km}{s}$.

Висновки

У роботі розглянуто дві моделі об'єкту Хога. Класична астрономічна модель не пояснювала всі отримані дані від телескопу Хаббл щодо об'єкту Хога. Вихрова модель використовує декілька фізичних явищ для пояснення Доплерівського ефекту. В її основі лежить концепція кільцевого вихору із закрученням та вплив на його поступальний рух зміни товщини кільця з різних боків в результаті розвитку бочкоподібної моди коливань його форми. Зміна товщини кільця впливає на швидкість його поступального руху вздовж осі. В результаті це призводить до глобального обертання кільця навколо діаметру, а разом з ним і обертання центральної еліптичної галактики. Тоді Доплерівський зсув випромінювання пояснюється саме таким обертанням.

Список використаних джерел

- [1] Hoag's Object https://en.wikipedia.org/wiki/Hoag%27s_Object
- [2] Hoag, Arthur A. A peculiar object in Serpens. *Astronomical Journal*, Vol. 55, p. 170-170, October 1950
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1950AJ.....55Q.170H>
- [3] Noah Brosch, Ido Finkelman, Tom Oosterloo, Gyula Jozsa, Alexei Moiseev. H1 in H0: Hoag's Object revisited. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 435, Issue 1, 11 October 2013, p. 475–481.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stt1348>
- [4] V. M. Kontorovich and S. A. Poslavskiy, Swirling self-gravitating vortex as the imagination of the Hoag's ring galaxy. *Low Temperature Physics*. – 2022. <https://doi.org/10.1063/10.0010206>
- [5] Astronomy Picture of the Day 2002 September 9
<https://apod.nasa.gov/apod/ap020909.html>
- [6] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 1978
- [7] Ido Finkelman, Alexei Moiseev, Noah Brosch, Ivan Katkov. Hoag's Object: evidence for cold accretion on to an elliptical galaxy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 418, Issue 3, December 2011, Pages 1834–1849, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19601.x>

- [8] Kop'ev, Viktor F et al., Vortex ring oscillations, the development of turbulence in vortex rings and generation of sound. *Physics-Uspekhi* (2000),43(7): 663, <https://doi.org/10.1070/PU2000v043n07ABEH000769>
- [9] Schweizer, Francois [search by orcid](#) ; Ford, W. Kent, Jr. ; Jedrzejewski, Robert ; Giovanelli, Riccardo. The Structure and Evolution of Hoag's Object *Astrophysical Journal* v.320, p.454, September 1987; <https://doi.org/10.1093/mnras/stt1348>